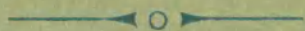


Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ



П. П. КОРОВКИН
НЕРАВЕНСТВА



ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 5

П. П. КОРОВКИН

НЕРАВЕНСТВА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

АННОТАЦИЯ

Брошюра знакомит читателей с некоторыми замечательными неравенствами, играющими большую роль в различных разделах высшей математики, и применением их к нахождению наибольшего и наименьшего значений величин и к вычислению пределов. В книге приводятся 63 задачи, из которых многие снабжены подробными решениями.

Рассчитана книга на учащихся старших классов.

© Издательство «Наука», 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Г л а в а I. Неравенства	5
§ 1. Целая часть числа	5
§ 2. Среднее арифметическое и среднее геометри- ческое	10
§ 3. Число e	18
§ 4. Неравенство Бернулли	21
§ 5. Средние степенные	26
Г л а в а II. Применение неравенств	31
§ 1. Наибольшее и наименьшее значения функции .	31
§ 2. Неравенство Гельдера	39
§ 3. Применение неравенств к вычислению пределов	42
§ 4. Применение неравенств к приближенному вычи- слению величин	48
Решения упражнений	57

ПРЕДИСЛОВИЕ

В курсе математики средней школы учащийся знакомится со свойствами неравенств и методами их решения в простейших случаях (неравенства первой и второй степени).

В этой книжке автор не ставил себе целью изложить основные свойства неравенств, а стремился лишь познакомить учащихся старших классов средней школы с некоторыми замечательными неравенствами, играющими большую роль в различных разделах высшей математики, и применением их к нахождению наибольшего и наименьшего значений величин и к вычислению некоторых пределов.

В книжке приводится 63 задачи, из которых 35 с подробными решениями составляют основное ее содержание, а 28 задач даются в конце § 1 гл. I и §§ 1, 3, 4 гл. II мелким шрифтом в качестве упражнений. Решения упражнений читатель найдет в конце книжки.

Самостоятельное решение нескольких трудных задач, несомненно, принесет учащимся большую пользу, чем решение большого числа задач простых.

Поэтому мы предлагаем учащимся обращаться к решениям упражнений только после того, как будет найдено самостоятельное решение, быть может и отличающееся (что очень хорошо!) от решения, указанного автором.

При доказательстве неравенств и решении задач автор пользовался лишь свойствами неравенств и пределов, изучаемыми в 9 классе средней школы.

При подготовке четвертого издания, в отличие от предыдущих изданий, произведено несколько иное расположение задач, добавлены новые задачи и поясняющий текст. В таком виде содержание книги может быть факультативным курсом в старших классах средней школы.

П. Коровкин

Глава I

НЕРАВЕНСТВА

Важная роль неравенств определяется применением их в различных вопросах естествознания и техники.

Дело в том, что значения величин, определяемых из той или иной практической задачи (расстояние до Луны, скорость Луны и т. д.), могут быть найдены не точно, а приближенно. Если x — найденное значение величины, а Δx — погрешность ее измерения, то истинное значение y удовлетворяет неравенствам

$$x - |\Delta x| \leq y \leq x + |\Delta x|.$$

При решении практических задач приходится учитывать все погрешности измерений. Более того, по мере совершенствования техники и усложнения задач приходится совершенствовать и технику измерения величин. Большие погрешности измерения становятся недопустимыми при решении сложных технических проблем (посадка лунохода в намеченный район Луны, посадка космических кораблей на Венеру и др.).

§ 1. Целая часть числа

Целой частью числа x (обозначается $[x]$) называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Из этого определения следует, что $[x] \leq x$, так как целая часть не превосходит x . С другой стороны, так как $[x]$ — наибольшее целое число, удовлетворяющее последнему неравенству, то $[x] + 1 > x$.

Таким образом, $[x]$ есть целое число, определяющееся неравенствами

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Так, например, из неравенств

$$3 < \pi < 4, \quad 5 < \frac{17}{3} < 6, \quad -2 < -\sqrt{2} < -1, \quad 5 = 5 < 6$$

следует, что

$$[\pi] = 3, \quad \left[\frac{17}{3}\right] = 5, \quad [-\sqrt{2}] = -2, \quad [5] = 5.$$

Умение находить целую часть величины очень важно в приближенных вычислениях. В самом деле, если мы умеем найти целую часть величины x , то, приняв $[x]$ или $[x] + 1$ за приближенное значение величины x , мы сделаем погрешность, величина которой не больше единицы, так как

$$0 \leq x - [x] < [x] + 1 - [x] = 1,$$

$$0 < [x] + 1 - x \leq [x] + 1 - [x] = 1.$$

Более того, знание целой части величины позволяет просто найти ее значение с точностью до $\frac{1}{2}$. За такое значение можно взять $[x] + \frac{1}{2}$.

Отметим еще, что умение находить целую часть числа позволит определить это число и с любой степенью точности. Действительно, так как

$$[Nx] \leq Nx \leq [Nx] + 1,$$

то

$$\frac{[Nx]}{N} \leq x \leq \frac{[Nx]}{N} + \frac{1}{N}.$$

Таким образом, число

$$\frac{[Nx]}{N} + \frac{1}{2N}$$

отличается от числа x не более чем на $\frac{1}{2N}$. При большом N ошибка будет мала.

В следующих задачах находится целая часть числа.

Задача 1. Найти целую часть числа

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Решение. Воспользуемся неравенствами

$$1 \leq 1 \leq 1,$$

$$0,7 < \sqrt{\frac{1}{2}} < 0,8,$$

$$0,5 < \sqrt{\frac{1}{3}} < 0,6,$$

$$0,5 \leq \sqrt{\frac{1}{4}} \leq 0,5,$$

$$0,4 < \sqrt{\frac{1}{5}} < 0,5$$

(они получаются при извлечении корней с точностью до 0,1 с недостатком и избытком). Сложив эти неравенства, получим

$$1 + 0,7 + 0,5 + 0,5 + 0,4 < x < 1 + 0,8 + 0,6 + 0,5 + 0,5,$$

т. е. $3,1 < x < 3,4$ и, следовательно, $[x] = 3$.

Заметим в связи с этим примером, что число 3,25 отличается от x не более чем на 0,15.

Задача 2. Найти целую часть числа

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Решение. Эта задача отличается от предыдущей только количеством слагаемых: в первой слагаемых 5, во второй — 1 000 000. Но уже это обстоятельство делает практически невозможным применение предыдущего метода решения.

Для решения задачи изучим сумму

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

С этой целью докажем неравенства

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}. \quad (1)$$

В самом деле, так как

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} &= \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

и

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n},$$

то

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этим доказана первая часть неравенств (1); вторая часть доказывается аналогично.

Полагая в неравенствах (1) $n = 2, 3, 4, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} &< \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2, \\ 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} &< \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} &< \frac{1}{\sqrt{4}} < 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}, \\ &\dots\dots\dots \\ 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} &< \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}. \end{aligned}$$

Сложим теперь эти неравенства:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} &< \\ &< \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2. \end{aligned}$$

Прибавляя ко всем частям полученных неравенств по 1, найдем

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 &< \\ &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1. \quad (2) \end{aligned}$$

Так как $2\sqrt{2} < 3$, а $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, то из неравенств (2) следует, что

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} - 2 &< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1. \quad (3) \end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами (3), легко найдем теперь целую часть числа

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Для этого, полагая в неравенствах (3) $n = 1\,000\,000$, получим

$$2\sqrt{1\,000\,000} - 2 <$$

$$< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 2\sqrt{1\,000\,000} - 1,$$

или

$$1998 < y < 1999.$$

Следовательно, $[y] = 1998$.

Из неравенств (2) следует, что число 1998,6 отличается от y не более чем на 0,4. Таким образом, мы вычислили число y с точностью до $\frac{40}{1998,4} \% = 0,02\%$.

Числа 1998 и 1999 отличаются от числа y не более чем на единицу, а число 1998,5 — не более чем на половину.

Разберем теперь задачу несколько иного характера.

Задача 3. Доказать неравенство

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Решение. Положим

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{100}{101}.$$

Так как

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \dots, \quad \frac{99}{100} < \frac{100}{101},$$

то $x < y$ и, следовательно,

$$x^2 < xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < 0,1.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать неравенства

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \dots \\ \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}.$$

2. Доказать неравенства

$$1800 < \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 1800,02.$$

3. Найти $[50z]$, где

$$z = \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Отв. $[50z] = 90\,000$.

4. Методом математической индукции доказать неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}.$$

§ 2. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа, то образованные из них числа

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

называют соответственно *средним арифметическим* и *средним геометрическим* чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для этих чисел в начале прошлого столетия французский математик О. Коши установил неравенство

$$g \leq a,$$

часто применяемое при решении задач. Мы это неравенство докажем, но предварительно установим справедливость одного вспомогательного утверждения.

Теорема 1. Если произведение n положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равно 1, то их сумма не меньше n :

$$x_1 x_2 \dots x_n = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции¹⁾. Вначале проверим справедливость теоремы при $n=2$, т. е. покажем, что

$$x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2.$$

При решении этого вопроса рассмотрим отдельно два случая:

1) $x_1 = x_2 = 1.$

В этом случае $x_1 + x_2 = 2$, и теорема доказана.

2) $0 < x_1 < x_2.$

В этом случае $x_1 < 1$, а $x_2 > 1$, так как их произведение равно 1. Из равенства

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_2 + x_1 - x_1 x_2 - 1$$

следует, что

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1). \quad (4)$$

Равенство (4) установлено нами без каких-либо ограничений на числа x_1 и x_2 . Учитывая еще, что $x_1 x_2 = 1$, получим

$$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

Наконец, так как $x_1 < 1 < x_2$, то последнее число положительно и $x_1 + x_2 > 2$. Итак, при $n=2$ теорема уже доказана. Заметим, что равенство

$$x_1 + x_2 = 2$$

осуществляется только тогда, когда $x_1 = x_2$. Если же $x_1 \neq x_2$, то

$$x_1 + x_2 > 2.$$

¹⁾ Подробнее о методе математической индукции рассказано в книжке: И. С. Соминский, Метод математической индукции, изд. 8, «Наука», 1974 (серия «Популярные лекции по математике», выпуск 3).

Теперь, опираясь на метод математической индукции, предполагаем, что теорема верна при $n = k$, т. е. предполагаем, что неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k \geq k$$

имеет место, если $x_1 x_2 x_3 \dots x_k = 1$, и докажем теорему для $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1,$$

если $x_1 x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1} = 1$, причем $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, ..., $x_k > 0$, $x_{k+1} > 0$.

Прежде всего заметим, что если

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1} = 1,$$

то могут представиться два случая:

1) все множители $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}$ одинаковы, т. е.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_k = x_{k+1};$$

2) не все множители одинаковы.

В первом случае каждый множитель равен единице, а их сумма равна $k + 1$, т. е.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} = k + 1.$$

Во втором случае среди множителей произведения $x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1}$ найдутся числа как больше, так и меньше единицы (если бы все множители были меньше единицы, то и произведение их было бы меньше единицы).

Пусть, например, $x_1 < 1$, а $x_{k+1} > 1$. Мы имеем

$$(x_1 x_{k+1}) x_2 x_3 \dots x_k = 1.$$

Полагая $y_1 = x_1 x_{k+1}$, получим

$$y_1 x_2 x_3 \dots x_k = 1.$$

Так как здесь произведение k положительных чисел равно единице, то (согласно предположению) их сумма не меньше k , т. е.

$$y_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k \geq k.$$

Но

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} &= \\&= (y_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \geqslant \\&\geqslant k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k+1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1.\end{aligned}$$

Вспоминая, что $y_1 = x_1 x_{k+1}$, получим

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} &\geqslant \\&\geqslant (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 = \\&= (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1).\end{aligned}$$

Так как $x_1 < 1$, а $x_{k+1} > 1$, то $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} &\geqslant \\&\geqslant (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k+1.\end{aligned}$$

Этим теорема 1 доказана.

Задача 1. Доказать, что если $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n,$$

причем знак равенства имеет место, только когда

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n.$$

Решение. Так как

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \dots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1,$$

то неравенство следует из теоремы 1. Знак равенства имеет место, только когда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_1} = 1,$$

т. е. когда $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

Задача 2. Доказать неравенство

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geqslant 2.$$

Решение. Имеем

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Так как произведение слагаемых в правой части равенства равно единице, то их сумма не меньше двух. Знак равенства имеет место только при $x=0$.

Задача 3. Доказать, что при $a > 1$

$$\lg a + \log_a 10 \geq 2.$$

Решение. Так как $\log_a 10 \cdot \lg a = 1$, то

$$\lg a + \log_a 10 = \lg a + \frac{1}{\lg a} \geq 2.$$

Задача 4. Доказать неравенство

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Разделим на x^2 числитель и знаменатель левой части неравенства:

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2}.$$

Так как $\frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1$, то $\frac{1}{x^2} + x^2 \geq 2$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Переходим теперь к доказательству утверждения, отмеченного в начале параграфа.

Теорема 2. Среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел.

Если числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ не все одинаковы, то среднее геометрическое этих чисел меньше их среднего арифметического.

Доказательство. Из равенства $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ следует, что

$$1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{g} \frac{x_2}{g} \dots \frac{x_n}{g}}, \quad \text{или} \quad \frac{x_1}{g} \frac{x_2}{g} \dots \frac{x_n}{g} = 1.$$

Так как произведение n положительных чисел равно 1, то (теорема 1) их сумма не меньше n , т. е.

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \dots + \frac{x_n}{g} \geq n.$$

Умножив обе части последнего неравенства на g и разделив на n , получим

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq g.$$

Заметим, что равенство имеет место, только когда

$$\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = \dots = \frac{x_n}{g} = 1, \text{ т. е. } x_1 = x_2 = \dots = x_n = g.$$

Если же числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ не все одинаковы, то

$$a > g.$$

Задача 5. Из всех параллелепипедов с данной суммой трех взаимно перпендикулярных ребер найти тот, объем которого наибольший.

Решение. Пусть $m = a + b + c$ — сумма ребер, а $V = abc$ — объем параллелепипеда. Так как

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} = \frac{m}{3},$$

то $V \leq \frac{m^3}{27}$. Знак равенства имеет место, только когда $a = b = c = \frac{m}{3}$, т. е. когда параллелепипед есть куб.

Задача 6. Доказать неравенство

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \geq 2. \quad (5)$$

Решение. Пользуясь теоремой 2, получим

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n!} &= \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} < \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} = \\ &= \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Возведя в n -ю степень обе части последнего неравенства, мы и получим неравенство (5).

Определение. Число

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

называется *средним степенным* чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ порядка α . В частности, число

$$c_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

есть среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, число

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

называется *средним квадратическим*, а число

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

называется *средним гармоническим* чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Задача 7. Доказать, что если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа и $\alpha < 0 < \beta$, то

$$c_\alpha \leq g \leq c_\beta, \quad (6)$$

т. е. среднее степенное с отрицательным показателем не превосходит среднего геометрического, а среднее степенное с положительным показателем не меньше среднего геометрического.

Решение. Пользуясь тем, что среднее геометрическое положительных чисел не превосходит среднего арифметического, имеем

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \dots a_n^\alpha} \leq \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $\frac{1}{\alpha}$ и учитывая, что $\frac{1}{\alpha} < 0$, получим

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_\alpha.$$

Этим доказана первая часть неравенств (6); вторая часть доказывается аналогично.

Из неравенств (6) следует, в частности, что среднее гармоническое c_{-1} не превосходит среднего арифметического c_1 .

Задача 8. Доказать, что если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа, то

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Решение. Так как $c_{-1} \leq g \leq c_1$, то

$$c_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = c_1.$$

Из этого неравенства следует, что

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Задача 9. Доказать неравенство

$$na_1 a_2 \dots a_n \leq a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n, \quad (7)$$

где $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$.

Решение. Так как среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, то

$$a_1 a_2 \dots a_n = \sqrt[n]{a_1^n a_2^n \dots a_n^n} \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}.$$

Умножая обе части этого неравенства на n , мы и получим неравенство (7).

Из неравенства (7) следует, что

$$2a_1 a_2 \leq a_1^2 + a_2^2, \quad 3a_1 a_2 a_3 \leq a_1^3 + a_2^3 + a_3^3,$$

$$4a_1 a_2 a_3 a_4 \leq a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4,$$

т. е. удвоенное произведение двух положительных чисел не превосходит суммы их квадратов, утроенное произведение трех чисел не превосходит суммы их кубов и т. д.

§ 3. Число e

Число e играет важную роль в математике. Мы придем к определению этого числа после решения ряда задач, в которых применяется только теорема 2.

Задача 1. Доказать, что для любых положительных чисел a, b ($a \neq b$) справедливо неравенство

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{abb \dots b}_n} < \frac{a + \overbrace{b+b+\dots+b}^n}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1},$$

что и требовалось.

Задача 2. Доказать, что с увеличением номера n величины

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ и } z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

увеличиваются, т. е.

$$x_n < x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad z_n < z_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Решение. Полагая в неравенстве предыдущей задачи $a=1$, $b=1+\frac{1}{n}$, получим

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Возводя обе части неравенства в $(n+1)$ -ю степень, будем иметь

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ т. е. } x_n < x_{n+1}.$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Задача 3. Доказать, что

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

убывает с увеличением номера n , т. е.

$$y_n > y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} y_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}} \end{aligned}$$

(см. обозначения задачи 2). Так как z_n возрастает с увеличением номера n , то y_n убывает.

В задачах 2 и 3 мы доказали, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= 2,25 < x_3 < \dots < x_n < \dots, \\ y_1 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2 = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = 3,375 > y_3 > \dots > y_n > \dots \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4.$$

Итак, переменная величина x_n удовлетворяет двум условиям:

1) x_n монотонно возрастает вместе с возрастанием номера n ;

2) x_n — ограниченная величина, $2 < x_n < 4$.

Известно, что монотонно возрастающая и ограниченная переменная величина имеет предел. Следовательно, существует предел переменной величины x_n . Этот предел обозначают буквой e , т. е.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Так как величина x_n приближается к своему пределу, возрастая, то x_n меньше своего предела, т. е.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что $e < 3$. В самом деле, если номер n велик, то

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2,985984.$$

Следовательно, и

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 2,985984 < 3.$$

Число e , наряду с числом π , имеет в математике большое значение. Оно употребляется, например, в качестве основания логарифмов, называемых *натуральными логарифмами*. Логарифм числа N при основании e символически обозначается $\ln N$ (читается: логарифм натуральный N).

Известно, что числа e и π иррациональны. Каждое из этих чисел вычислено с точностью до 808 знаков после запятой, причем

$$e = 2,7182818285490 \dots$$

Покажем теперь, что и предел переменной величины y_n равен e . В самом деле,

$$\lim y_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Так как y_n приближается к числу e убывая (задача 2), то

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e. \quad (9)$$

Задача 4. Доказать неравенство

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (10)$$

Решение. Мы докажем неравенство (10) методом математической индукции. Оно легко проверяется для $n = 1$. В самом деле,

$$1! = 1 > \left(\frac{1}{e}\right)^1.$$

Предположим, что неравенство (10) справедливо для $n = k$, т. е.

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $k + 1$, получим

$$(k + 1)k! = (k + 1)! > \left(\frac{k}{e}\right)^k (k + 1) = \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}.$$

Так как согласно неравенству (8) $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e$, то

$$(k + 1)! > \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{e} = \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1},$$

т. е. неравенство (9) доказано для $n = k + 1$. Этим самым доказана справедливость неравенства (9) для всех значений n .

Так как $e < 3$, то из неравенства (9) следует, что

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

С помощью последнего неравенства легко доказать, что

$$300! > 100^{300}.$$

В самом деле, полагая в нем $n = 300$, получим

$$300! > \left(\frac{300}{3}\right)^{300} = 100^{300}.$$

Совершенно аналогично неравенству задачи 4 доказывается неравенство

$$n! < e \left(\frac{n + 1}{e}\right)^{n+1}.$$

§ 4. Неравенство Бернулли

В этом параграфе, опираясь на теорему 2, мы докажем неравенство Бернулли, представляющее самостоятельный интерес и часто применяемое при решении задач.

Теорема 3. Если $x \geq -1$ и $0 < \alpha < 1$, то

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x. \quad (11)$$

Если же $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$, то

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x. \quad (12)$$

Знак равенства в (11) и (12) имеет место только при $x = 0$.

Доказательство. Предположим, что α — рациональное число, причем $0 < \alpha < 1$. Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n — целые положительные числа, $1 \leq m < n$. Так как по условию $1+x \geq 0$, то

$$\begin{aligned} (1+x)^{\alpha} &= (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} = \\ &= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x) \dots (1+x)}_m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1}_{n-m}} \leq \\ &\leq \frac{(1+x) + (1+x) + \dots + (1+x) + 1 + 1 + \dots + 1}{n} = \\ &= \frac{m(1+x) + n - m}{n} = \frac{n + mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x = 1 + \alpha x. \end{aligned}$$

Знак равенства имеет место, только когда все множители, стоящие под знаком корня, одинаковы, т. е. когда $1+x=1$, $x=0$. Если же $x \neq 0$, то

$$(1+x)^{\alpha} < 1 + \alpha x.$$

Таким образом, мы доказали первую часть теоремы для того случая, когда α — рациональное число.

Предположим теперь, что α — иррациональное число, $0 < \alpha < 1$. Пусть $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ — последовательность рациональных чисел, имеющая пределом число α , причем $0 < r_n < 1$. Из неравенств

$$(1+x)^{r_n} \leq 1 + r_n x, \quad x \geq -1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

уже доказанных нами для случая, когда показателем степени является рациональное число, следует, что

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{r_n \rightarrow \alpha} (1+x)^{r_n} \leq \lim_{r_n \rightarrow \alpha} (1 + r_n x) = 1 + \alpha x.$$

Этим неравенство (11) доказано и для иррациональных значений α . Нам остается еще доказать, что для иррациональных значений α при $x \neq 0$ и $0 < \alpha < 1$

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x,$$

т. е. что при $x \neq 0$ в (11) знак равенства не имеет места. С этой целью возьмем рациональное число r такое, что $\alpha < r < 1$. Очевидно, имеем

$$(1+x)^{\alpha} = \left[(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \right]^r.$$

Так как $0 < \frac{\alpha}{r} < 1$, то, как уже доказано,

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \leq 1 + \frac{\alpha}{r} x.$$

Следовательно,

$$(1+x)^{\alpha} \leq \left(1 + \frac{\alpha}{r} x \right)^r.$$

Если $x \neq 0$, то $\left(1 + \frac{\alpha}{r} x \right)^r < 1 + r \frac{\alpha}{r} x = 1 + \alpha x$, т. е.

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x.$$

Этим первая часть теоремы доказана полностью.

Переходим к доказательству второй части теоремы.

Если $1+\alpha x < 0$, то неравенство (12) очевидно, так как левая часть его неотрицательна, а правая отрицательна.

Если $1+\alpha x \geq 0$, $\alpha x \geq -1$, то рассмотрим отдельно оба случая.

Пусть $\alpha > 1$; тогда в силу доказанной первой части теоремы имеем

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha} \alpha x = 1+x,$$

причем знак равенства имеет место только при $x=0$. Возводя обе части последнего неравенства в степень α , получим

$$1+\alpha x \leq (1+x)^{\alpha}.$$

Пусть теперь $\alpha < 0$. Если $1+\alpha x < 0$, то неравенство (12) очевидно. Если же $1+\alpha x \geq 0$, то выбираем целое

положительное число n так, чтобы имело место неравенство $-\frac{\alpha}{n} < 1$. В силу первой части теоремы получим

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}x,$$

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{n}x} \geq 1 + \frac{\alpha}{n}x$$

(последнее неравенство справедливо, так как $1 \geq 1 - \frac{\alpha^2}{n^2}x^2$). Возводя в n -ю степень обе части последнего неравенства, получим

$$(1+x)^{\alpha} \geq \left(1 + \frac{\alpha}{n}x\right)^n \geq 1 + n\frac{\alpha}{n}x = 1 + \alpha x.$$

Заметим, что равенство возможно только в случае, когда $x=0$. Этим теорема полностью доказана.

Задача 1. Доказать, что если $0 > \alpha > -1$, то

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (13)$$

Решение. Так как $0 < \alpha+1 < 1$, то в силу неравенства (11) имеем

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 + \frac{\alpha+1}{n},$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 - \frac{\alpha+1}{n}.$$

Умножая эти неравенства на $n^{\alpha+1}$, получим

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + (\alpha+1)n^{\alpha},$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - (\alpha+1)n^{\alpha}.$$

Из этих неравенств легко следуют неравенства (13).

Задача 2. Доказать, что если $0 > \alpha > -1$, то

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{\alpha+1} <$$

$$< m^{\alpha} + (m+1)^{\alpha} + \dots + n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - (m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (14)$$

Решение. Положив в неравенствах (13) $n = m, m + 1, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)^{1+\alpha} - m^{1+\alpha}}{1+\alpha} &< m^\alpha < \frac{m^{1+\alpha} - (m-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}, \\ \frac{(m+2)^{1+\alpha} - (m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} &< (m+1)^\alpha < \frac{(m+1)^{1+\alpha} - m^{1+\alpha}}{1+\alpha}, \\ \frac{(m+3)^{1+\alpha} - (m+2)^{1+\alpha}}{1+\alpha} &< (m+2)^\alpha < \frac{(m+2)^{1+\alpha} - (m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha} &< n^\alpha < \frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, мы и получим (14).

Задача 3. Найти целую часть числа

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}.$$

Решение. Положив в (14) $m = 4, n = 1\,000\,000$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, получим

$$\frac{1\,000\,001^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} < x < \frac{1\,000\,000^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}},$$

т. е.

$$\frac{3}{2} \cdot 1\,000\,001^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \cdot 4^{\frac{2}{3}} < x < \frac{3}{2} \cdot 1\,000\,000^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \cdot 3^{\frac{2}{3}}.$$

Так как

$$\frac{3}{2} \cdot 1\,000\,001^{\frac{2}{3}} > \frac{3}{2} \cdot 1\,000\,000^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot 10\,000 = 15\,000,$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} < 4, \quad \frac{3}{2} \sqrt[3]{9} > \frac{3}{2} \sqrt[3]{8} = 3,$$

то

$$15\,000 - 4 < x < 15\,000 - 3, \quad \text{т. е.} \quad 14\,996 < x < 14\,997.$$

Из этих неравенств следует, что $[x] = 14\,996$.

§ 5. Средние степенные

Уже в § 2 перед задачей 7 мы назвали число

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

средним степенным порядка α положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Там же (задача 7) доказано, что $c_\alpha \leq c_\beta$, если $\alpha < 0 < \beta$.

Здесь будет доказана справедливость неравенства

$$c_\alpha \leq c_\beta$$

всякий раз, когда $\alpha < \beta$. Иными словами, среднее степенное порядка α монотонно возрастает вместе с α .

Теорема 4. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа и $\alpha < \beta$, то $c_\alpha \leq c_\beta$, причем $c_\alpha = c_\beta$, только когда

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Доказательство. Для случая, когда числа α и β имеют разные знаки, теорема 4 доказана нами выше (см. задачу 7 § 2 и предшествующее ей определение). Нам остается доказать теорему только для случая, когда α и β имеют одинаковые знаки.

Предположим, что $0 < \alpha < \beta$, и положим

$$k = c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Разделив c_β на k , получим

$$\frac{c_\beta}{k} = \frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \dots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Положив теперь

$$d_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha, \quad d_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha, \quad \dots, \quad d_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha,$$

получим

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k} \right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{k} \right)^\alpha + \dots + \left(\frac{a_n}{k} \right)^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{k} c_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} c_\alpha = 1, \end{aligned}$$
$$\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} = 1, \quad d_1 + d_2 + \dots + d_n = n.$$
$$d_1 = 1 + x_1, \quad d_2 = 1 + x_2, \dots, d_n = 1 + x_n.$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0.$$
$$\left. \begin{aligned} d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1+x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_1, \\ d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1+x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1+x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_n. \end{aligned} \right\} (*)$$
$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq n + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n. \quad (16)$$
$$\frac{c_\beta}{k} \geq \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1, \quad c_\beta \geq k = c_\alpha.$$

27

Если же числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ не все одинаковы, то

$$c_\beta > c_\alpha.$$

Этим теорема 4 доказана для случая, когда $0 < \alpha < \beta$.

Если $\alpha < \beta < 0$, то $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$. Рассуждая так же, как и прежде, мы получим в (*) и (16) обратные знаки неравенств. Но так как $\beta < 0$, то из неравенства

$$\frac{\frac{\beta}{d_1^\alpha} + \frac{\beta}{d_2^\alpha} + \dots + \frac{\beta}{d_n^\alpha}}{n} \leq 1$$

следует, что

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{\frac{\beta}{d_1^\alpha} + \frac{\beta}{d_2^\alpha} + \dots + \frac{\beta}{d_n^\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \geq 1^{\frac{1}{\beta}} = 1,$$

т. е.

$$c_\beta \geq k = c_\alpha.$$

Этим теорема 4 доказана полностью.

В дальнейшем мы называем среднее геометрическое *средним степенным порядка нуль*, т. е. полагаем $g = c_0$.

Заметим, что теорема 4 остается в силе и в этом случае, так как (задача 7 § 2) $c_\alpha \leq g = c_0$, если $\alpha < 0$, и $c_\beta \geq g = c_0$, если $\beta > 0$.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что

$$c_{-1} \leq c_0 \leq c_1 \leq c_2,$$

т. е. среднее гармоническое не превосходит среднего геометрического, среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, а среднее арифметическое не превосходит среднего квадратического положительных чисел. Например, если $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$, то

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7} = 1,7 \dots,$$

$$c_0 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = 2,$$

$$c_1 = \frac{1 + 2 + 4}{3} = \frac{7}{3} = 2,3 \dots,$$

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 4 + 16}{3}} = \sqrt{7} = 2,6 \dots$$

и, следовательно,

$$c_{-1} = 1, 7 \dots < 2 = c_0 < 2, 3 \dots = c_1 < 2, 6 \dots = c_2.$$

Задача 1. Доказать, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$, если $x + y + z = 6$.

Решение. Так как среднее арифметическое не превосходит среднего квадратического, то

$$\frac{x + y + z}{3} \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}.$$

В нашей задаче $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{6^2}{3} = 12$. Знак равенства имеет место, только когда $x = y = z = 2$.

Задача 2. Доказать, что если x, y, z — положительные числа и $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, то

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 16 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Решение. Так как $c_2 \leq c_3$, то

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

В нашей задаче

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{8}{3}},$$

т. е.

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \cdot \frac{8}{3} \sqrt{\frac{8}{3}} = 16 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 3. Доказать, что для положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ справедливы неравенства

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^\alpha \leq \leq n^{\alpha-1} (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha), \quad \alpha \geq 1, \quad (17)$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^\alpha \geq \geq n^{\alpha-1} (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (18)$$

Решение. Если $\alpha > 1$, то

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = c_1.$$

Из этого неравенства легко следует неравенство (17). Точно так же доказывается и неравенство (18). В частности, из неравенств (17) и (18) следует, что

$$(x + y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1} (x^\alpha + y^\alpha), \quad \alpha \geq 1, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$(x + y)^\alpha \geq 2^{\alpha-1} (x^\alpha + y^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Задача 4. Доказать, что если $x^3 + y^3 + z^3 = 81$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$x + y + z \leq 9.$$

Решение. Так как

$$(x + y + z)^3 \leq 3^2 (x^3 + y^3 + z^3) = 9 \cdot 81 = 729$$

(неравенство (17)), то

$$x + y + z \leq \sqrt[3]{729} = 9.$$

Глава II

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

В этой главе будет рассмотрено применение неравенств к нахождению наибольших и наименьших значений функции и к вычислению пределов некоторых последовательностей. Кроме того, в этой главе будут получены некоторые важные неравенства.

§ 1. Наибольшее и наименьшее значения функции

Многие практические задачи сводятся к той или иной функции. Например, если x , y , z — длины ребер коробки с крышкой (параллелепипед), то площадь поверхности коробки

$$S = 2xy + yz + 2zx,$$

а ее объем

$$V = xyz.$$

Если материал, из которого делается коробка, дорог, то, конечно, желательно при заданном объеме коробки сделать ее так, чтобы на нее пошло как можно меньше материала, т. е. чтобы площадь поверхности коробки была наименьшей. Мы привели простой пример задачи на максимум и минимум функции многих переменных. Подобные задачи встречаются весьма часто, и виднейшие из математиков всегда уделяют должное внимание разработке методов решения их.

Здесь мы решим ряд из таких задач, опираясь на неравенства, изученные в первой главе¹⁾. Предварительно докажем одну теорему.

Теорема 5. Если $a > 0$, $\alpha > 1$, $x \geq 0$, то функция

$$x^\alpha - ax$$

¹⁾ О применении неравенств второй степени к решению задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений величин рассказано в книжке: И. П. Натансон, Простейшие задачи на максимум и минимум, изд. 2, Гостехиздат, 1952 (серия «Популярные лекции по математике», выпуск 2).

принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$,
 равное $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Доказательство. Теорема доказывается очень просто в том случае, когда $\alpha = 2$. В самом деле, так как

$$x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4},$$

то наименьшее значение функция имеет при $x = \frac{a}{2} > 0$,
 причем значение это равно $-\frac{a^2}{4}$.

В случае произвольного $\alpha > 1$ теорема доказывается с использованием неравенства (12), доказанного в теореме 3. Так как $\alpha > 1$, то

$$(1+z)^\alpha \geq 1 + \alpha z, \quad z \geq -1,$$

причем равенство имеет место только при $z = 0$. Полагая здесь $1+z = y$, получим

$$y^\alpha \geq 1 + \alpha(y-1), \quad y^\alpha - \alpha y \geq 1 - \alpha, \quad y \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только при $y = 1$. Умножая обе части последнего неравенства на c^α , получим

$$(cy)^\alpha - \alpha c^{\alpha-1}(cy) \geq (1-\alpha)c^\alpha, \quad y \geq 0.$$

Полагая

$$x = cy \quad \text{и} \quad ac^{\alpha-1} = a, \quad c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

получим

$$x^\alpha - ax \geq (1-\alpha)c^\alpha = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

причем знак равенства имеет место только при $x = c =$
 $= \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Итак, функция

$$x^\alpha - ax, \quad \alpha > 1, \quad a > 0, \quad x \geq 0,$$

принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, равное $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. Теорема доказана.

В частности, функция $x^2 - ax$ ($\alpha = 2$) принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}} = \frac{a}{2}$, равное $(1-2)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2-1}} = -\frac{a^2}{4}$. Этот результат согласуется с выводом, полученным ранее другим путем. Функция $x^3 - 27x$ принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = 3$, равное $(1-3)\left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}} = -54$.

Примечание. Отметим для дальнейшего, что функция

$$ax - x^a = -(x^a - ax),$$

где $\alpha > 1$, $a > 0$, $x \geq 0$, принимает наибольшее значение в точке

$$x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

равное $(\alpha - 1)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Задача 1. Из круглого бревна выпилить балку наибольшей прочности¹⁾.

Решение. Пусть $AB = x$ — ширина балки, $BC = y$ — высота ее и $AC = d$ — диаметр бревна (рис. 1). Обозначая через P прочность балки, получим

$$P = kxy^2 = kx(d^2 - x^2) = k(d^2x - x^3).$$

Функция $d^2x - x^3$ принимает наибольшее значение при

$$x = \left(\frac{d^2}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad y^2 = d^2 - x^2 = \frac{2}{3}d^2,$$

$$y = \frac{d}{\sqrt{3}} \sqrt{2} = x \sqrt{2}.$$

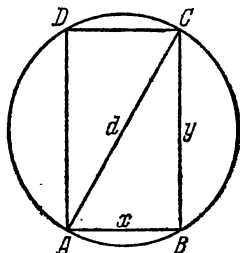


Рис. 1.

¹⁾ Прочность балки прямо пропорциональна произведению ширины балки на квадрат ее высоты,

Таким образом, балка будет иметь наибольшую прочность, если отношение ее высоты к ширине будет равно $\sqrt{2} \approx 1,4 = \frac{7}{5}$.

Задача 2. Найти наибольшее значение функции

$$y = \sin x \sin 2x.$$

Решение. Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то $\sin x \sin 2x = 2 \cos x \sin^2 x = 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 2(z - z^3)$, где $z = \cos x$ и, следовательно, $-1 \leq z \leq 1$. Функция $z - z^3 = z(1 - z^2)$ принимает отрицательные значения при $-1 \leq z < 0$, равна 0 при $z = 0$ и принимает положительные значения при $0 < z \leq 1$. Следовательно, наибольшее значение функции достигается в промежутке $0 < z \leq 1$.

В теореме 5 показано, что функция $z - z^3$, $z \geq 0$, принимает наибольшее значение в точке

$$z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В этой точке

$$\sin x \sin 2x = 2z(1 - z^2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Итак, функция $y = \sin x \sin 2x$ принимает наибольшее значение в тех точках, в которых $z = \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и

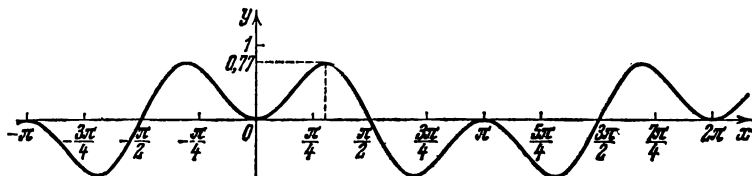


Рис. 2.

это значение равно $\frac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0,77$. График функции $y = \sin x \sin 2x$ изображен на рис. 2.

Задача 3. Найти наибольшее значение функции

$$y = \cos x \cos 2x.$$

Решение. Функция $y = \cos x \cos 2x$ не превосходит 1, так как каждый из сомножителей $\cos x$ и $\cos 2x$

не превосходит 1. Но в точках $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

$$\cos x \cos 2x = 1.$$

Итак, функция $y = \cos x \cos 2x$ принимает наибольшее значение 1 в точках $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. График функции $y = \cos x \cos 2x$ изображен на рис. 3.

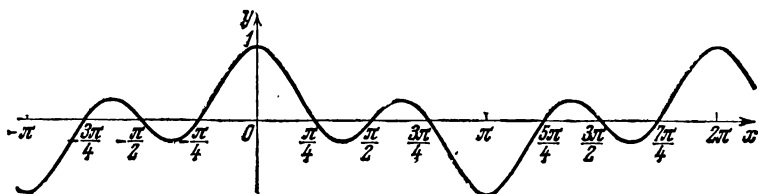


Рис. 3.

Задача 4. Найти наименьшее значение функции

$$x^a + ax,$$

где $a > 0, \alpha < 0, x \geq 0$.

Решение. Так как $\alpha < 0$, то согласно неравенству (12)

$$(1+z)^\alpha \geq 1 + \alpha z,$$

причем знак равенства имеет место только при $z = 0$. Полагая $1+z = y, z = y-1$, получим

$$y^\alpha \geq 1 + \alpha(y-1), \quad y \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только при $y = 1$. Из последнего неравенства следует, что

$$y^\alpha - \alpha y \geq 1 - \alpha, \quad (cy)^\alpha - \alpha c^{\alpha-1}(cy) \geq (1-\alpha)c^\alpha.$$

Полагая $a = -\alpha c^{\alpha-1}, x = cy$, получим

$$x^a + ax \geq (1-\alpha)c^\alpha = (1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

причем знак равенства имеет место только при $x = c = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Итак, функция $x^\alpha + ax$ принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, равное

$$(1 - \alpha) \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Например, функция

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 27x, \quad x \geq 0,$$

принимает наименьшее значение в точке

$$x = \left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}-1}} = \frac{1}{27}.$$

Это значение равно

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}-1}} = 4.$$

Задача 5. Найти наиболее выгодные размеры сосуда цилиндрической формы¹⁾, имеющего дно и крышку (консервная банка).

Решение. Пусть $V = \pi r^2 h$ — объем сосуда, где r — радиус, h — высота цилиндра. Полная поверхность сосуда имеет площадь

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Так как $h = \frac{V}{\pi r^2}$, то

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Полагая $x = \frac{1}{r}$, получим

$$S = 2\pi x^{-2} + 2Vx = 2\pi \left(x^{-2} + \frac{V}{\pi} x\right).$$

¹⁾ Размеры сосуда считаются наиболее выгодными, если при заданном объеме требуется наименьшее количество материала для его изготовления, т. е. сосуд имеет наименьшую площадь поверхности.

Функция $x^{-2} + \frac{v}{\pi}x$, согласно решению предыдущей задачи, принимает наименьшее значение при

$$x = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{\frac{1}{-2-1}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}.$$

Возвращаясь к нашим прежним обозначениям, найдем

$$\frac{1}{r} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}, \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi}, \quad r = \frac{h}{2}, \quad h = 2r = d.$$

Таким образом, сосуд имеет наиболее выгодные размеры, если высота и диаметр сосуда одинаковы.

УПРАЖНЕНИЯ

6. Найти наибольшее значение функции $x(6-x)^2$ при $0 < x < 6$.
Указание. Положить $y = 6 - x$.

7. Из квадратного листа со стороной $2a$ требуется сделать коробку без крышки, вырезая по углам квадраты и загибая затем

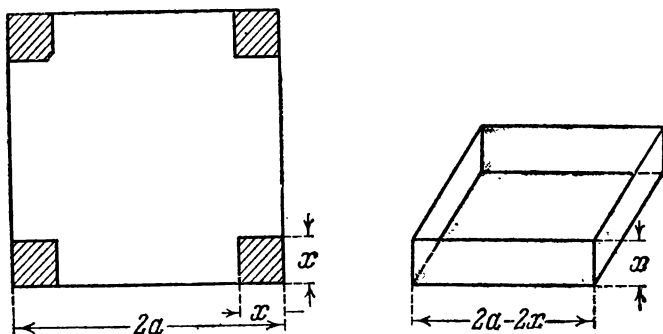


Рис. 4.

получающиеся выступы так, чтобы коробка получилась наибольшего объема (рис. 4). Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов?

8. Найти наименьшее значение функции

$$x^6 + 8x^2 + 5.$$

9. Найти наименьшее значение функции

$$x^6 - 8x^2 + 5.$$

10. Найти наибольшее значение функции

$$x^a - ax \quad \text{при } 0 < a < 1, \quad a > 0, \quad x \geq 0,$$

11. Доказать, что при $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sqrt[4]{x} \leq \frac{3}{8} + 2x.$$

12. Доказать, что при $n \geq 3$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь неравенством (8)

13. Найти наибольшее из чисел

$$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[5]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

14. Доказать неравенство

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

15. Доказать неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

если числа a_i одного знака и не меньше -1 .

16. Доказать неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \quad (19)$$

У к а з а н и е. Докажите сначала, что многочлен

$$\begin{aligned} (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 = \\ = x^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + \\ + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \end{aligned}$$

не может иметь двух различных действительных корней.

17. Пользуясь неравенством (19), доказать, что среднее арифметическое не больше среднего квадратического.

18. Доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

19. Пользуясь неравенством упражнения 18, доказать неравенство

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

20. Найти наибольшие значения функций

$$\frac{x^3}{x^4 + 5}, \quad x^6 - 0,6x^{10}.$$

Отв. $\frac{3}{4}$; 0,4.
 $4\sqrt[4]{15}$

21. При каком значении a наименьшее значение функции $\sqrt{x} + \frac{a}{x^2}$ равно 2,5?

Отв. $a = 8$.

§ 2. Неравенство Гельдера

В теореме 7, с помощью теорем 5 и 6, доказывается неравенство Гельдера, которое найдет применение при решении задач.

Теорема 6. Если $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x > 0$, $y > 0$, то

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \quad (20)$$

Доказательство. В силу теоремы 5, если $\alpha < 1$, $\alpha > 0$, $x \geq 0$, то

$$x^\alpha - \alpha x \geq (1 - \alpha) \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{\frac{\alpha}{1 - \alpha}}.$$

Полагая в этом неравенстве $\alpha = p$, $\alpha = py$, получим

$$x^p - (py)x \geq (1 - p) \left(\frac{py}{1 - p} \right)^{\frac{p}{1 - p}} = (1 - p) y^{\frac{p}{p - 1}}. \quad (21)$$

Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p - 1}{p}, \quad q = \frac{p}{p - 1}, \quad p - 1 = \frac{p}{q}.$$

Подставляя эти значения в неравенство (21), получим

$$x^p - pux \geq -\frac{p}{q} y^q.$$

Разделив все члены последнего неравенства на p и перенеся в противоположную сторону отрицательные члены, мы получим неравенство (20).

Из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\leqslant \\ &\leqslant AB \left(\frac{c_1^p + c_2^p + \dots + c_n^p}{p} + \frac{d_1^q + d_2^q + \dots + d_n^q}{q} \right) = \\ &= AB \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = AB \end{aligned}$$

(напомним, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $c_1^p + c_2^p + \dots + c_n^p = 1$, $d_1^q + d_2^q + \dots + d_n^q = 1$).

Итак, доказано, что левая часть неравенства (22) не превосходит AB , т. е. не превосходит правой части.

Нетрудно указать тот случай, когда в (22) имеет место знак равенства. В самом деле, знак равенства в (21) имеет место только при

$$x = \left(\frac{py}{p} \right)^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{q}{p}}, \quad x^p = y^q$$

(см. теорему 6). Точно так же, знак равенства в каждой строке (*) будет иметь место, только когда

$$c_1 = d_1^{\frac{q}{p}}, \quad c_2 = d_2^{\frac{q}{p}}, \quad \dots, \quad c_n = d_n^{\frac{q}{p}},$$

т. е. когда

$$c_1^p = d_1^q, \quad c_2^p = d_2^q, \quad \dots, \quad c_n^p = d_n^q.$$

Наконец, умножив эти равенства на $A^p B^q$, получим

$$\begin{aligned} B^q (Ac_1)^p &= A^p (Bd_1)^q, \quad \text{т. е.} \quad B^q a_1^p = A^p b_1^q, \\ \frac{a_1^p}{b_1^q} &= \frac{A^p}{B^q}, \quad \frac{a_2^p}{b_2^q} = \frac{A^p}{B^q}, \quad \dots, \quad \frac{a_n^p}{b_n^q} = \frac{A^p}{B^q}. \end{aligned}$$

Таким образом, знак равенства в (22) имеет место, если

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

Примечание. Полагая в неравенстве (22) $p=2$, $q=2$, получаем неравенство (19) (см. упражнение 16):

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\leqslant \\ &\leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}. \end{aligned}$$

§ 3. Применение неравенств к вычислению пределов

В следующих задачах, с помощью ранее доказанных неравенств, вычисляются пределы достаточно сложных последовательностей.

Задача 1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (23)$$

Решение. Объединяя неравенства (8) и (9), получим

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Логарифмируя эти неравенства при основании e , окончательно найдем

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Задача 2. Полагая

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$
$$z_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$$
$$z_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \dots$$
$$\dots, \quad z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

найти $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Решение. Заменяя n на $n-1$ в первой части неравенства (23), получим

$$\frac{1}{n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \ln \frac{n}{n-1}.$$

¹⁾ $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ обозначает логарифм от $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ при основании e (см. стр. 19—20).

Задача 3. Положив $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $x_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ..., $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} x_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

В предыдущей задаче мы положили

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Следовательно, $x_{2n} = z_n - \frac{1}{n}$. Но $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ln 2$ (см. предыдущую задачу). Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(z_n - \frac{1}{n}\right) = \ln 2.$$

Заметим еще, что $x_{2n+1} = x_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2.$$

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2.$$

Примечание. Числа $x_1 = a_1$, $x_2 = a_1 + a_2$, $x_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называются *частичными суммами* ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел. В этом случае число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ называют *суммой ряда*.

Из задачи 3 следует, что ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

сходится и имеет сумму, равную $\ln 2$.

Задача 4. Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

называется *гармоническим рядом*. Доказать, что гармонический ряд расходится.

Решение. Согласно неравенству (23)

$$\frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}.$$

Полагая $n = 1, 2, 3, \dots, n$, напомним n неравенств:

$$1 > \ln \frac{2}{1},$$

$$\frac{1}{2} > \ln \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{3} > \ln \frac{4}{3},$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}.$$

Складывая их, получим

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \\ &> \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty;$$

следовательно, гармонический ряд расходится.

Задача 5. Доказать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} + \dots \quad (26)$$

сходится при любом $a > 1$.

Решение. Последовательность частичных сумм этого ряда

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{2^a}, \\ x_3 &= 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}, \\ x_4 &= 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a}, \\ &\dots \\ x_n &= 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} \end{aligned}$$

монотонно возрастает, т. е.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n < \dots$$

С другой стороны, известно, что монотонно возрастающая ограниченная последовательность чисел имеет конечный предел. Следовательно, если мы докажем, что последовательность чисел x_n ограничена, то будет доказана и сходимость ряда (26). Положим

$$\begin{aligned} y_{2n} &= 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} - \frac{1}{6^a} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(2n-1)^a} - \frac{1}{(2n)^a}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} y_{2n} &= 1 - \left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{3^a} \right) - \left(\frac{1}{4^a} - \frac{1}{5^a} \right) - \dots \\ &\dots - \left(\frac{1}{(2n-2)^a} - \frac{1}{(2n-1)^a} \right) - \frac{1}{(2n)^a}, \end{aligned}$$

то (числа в каждой скобке положительны)

$$y_{2n} < 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 y_{2n} &= 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) - \\
 &\quad - 2 \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) = \\
 &\quad = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) - \frac{2}{2^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right).
 \end{aligned}$$

Так как $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$, то

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n.$$

Теперь, так как $x_{2n} > x_n$, $y_{2n} < 1$, то

$$1 > y_{2n} > x_n - \frac{2}{2^\alpha} x_n = \frac{2^\alpha - 2}{2^\alpha} x_n.$$

Отсюда следует, что

$$x_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2},$$

т. е. числа x_n при $\alpha > 1$ ограничены. Тем самым доказано, что ряд (26) сходится и сумма его не больше $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$.

Например, если $\alpha = 2$, то

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{2^2 - 2} = 2,$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \leq 2.$$

В курсе высшей математики доказывается, что

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (27)$$

УПРАЖНЕНИЯ

22. Найти сумму ряда

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots$$

У к а з а н и е. Используйте равенство (27).

Отв. $S = \frac{\pi^2}{12}$.

23. Доказать неравенства

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0.$$

24. Полагая

$$x_n = 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha,$$

доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0.$$

25. Доказать неравенство

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \dots + a_n b_n c_n)^3 \leqslant (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3),$$

если числа a_k, b_k, c_k положительны.

У к а з а н и е. Используйте неравенство (7) и метод доказательства (22).

26. Полагая $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}$, где k — целое положительное число, доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln k.$$

У к а з а н и е. Используйте метод решения задачи 2 настоящего параграфа.

§ 4. Применение неравенств к приближенному вычислению величин

В самом начале первой главы мы обратили внимание на то, что практические задачи, как правило, требуют приближенного вычисления величин и умения оперировать с такими приближенно вычисленными величинами. Более точное вычисление таких величин, разумеется, приведет к меньшим погрешностям в решении задачи.

В этом параграфе мы хотим вернуться к приближенному вычислению чисел вида

$$S_{n,k} = \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{(k+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k < n.$$

В § 1 гл. I нам удалось найти число $S_{n,k}$ с точностью до 0,4 при $k=1$, $n=1\,000\,000$ и $\alpha=\frac{1}{2}$ (задача 2). Там же (упражнения 2 и 3) число $S_{n,k}$ при $n=10^6$ и $k=10\,000$ нам удалось найти уже с точностью до 0,01. Сравнение этих двух примеров показывает, что указанный метод их решения дает более хорошие результаты вычисления при больших значениях k . В § 4 гл. I (задача 3) мы нашли целую часть числа $S_{n,k}$ при $k=4$, $n=10^6$ и $\alpha=\frac{1}{3}$. Таким образом, и это число было вычислено с точностью до 0,5. Мы не находили целой части числа $S_{n,1}$ при $\alpha=\frac{1}{3}$ и $n=10^6$ потому, что метод вычисления таких величин, указанный в первой главе, и не позволял этого сделать. В этом параграфе мы усовершенствуем метод вычисления величины $S_{n,1}$. Это усовершенствование позволит сравнительно легко находить подобные величины с большей степенью точности.

Лемма 1. Если $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n$, то

$$0 < A = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + (-1)^{n-1} x_n < x_1.$$

Доказательство. Число положительных слагаемых в написанной алгебраической сумме не меньше числа слагаемых отрицательных. Кроме того, предшествующие положительные слагаемые больше следующего отрицательного. Тем самым, алгебраическая сумма их положительна, $A > 0$. С другой стороны, так как

$$A = x_1 - (x_2 - x_3 + x_4 - \dots + (-1)^{n-2} x_n)$$

и величина в скобках положительна, то $A < x_1$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $0 < \alpha < 1$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{(2n+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} &< \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} < \frac{(2n)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (28)$$

Доказательство. Неравенство (28) вытекает из неравенства (14) (гл. I, § 4, задача 2) при замене m на $n+1$, n на $2n$ и α на $-\alpha$.

Теорема 8. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} S_{n,1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} = \\ &= \frac{2^\alpha}{2-2^\alpha} \left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right] - \\ &\quad - \frac{2^\alpha}{2-2^\alpha} \left[1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \dots - \frac{1}{(2n)^\alpha} \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} S_{n,1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} - \left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Прибавив и вычтя из правой части равенства число

$$2 \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right],$$

получим

$$\begin{aligned} S_{n,1} &= 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots - \frac{1}{(2n)^\alpha} + \\ &\quad + 2 \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Числа первой квадратной скобки имеют общий множитель $\frac{1}{2^\alpha}$. Вынеся его за скобки, получим

$$\begin{aligned} S_{n,1} &= 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \dots - \frac{1}{(2n)^\alpha} + \\ &\quad + \frac{2}{2^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right) - \\ &\quad - \left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку в круглых скобках стоит число $S_{n,1}$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^a} + \frac{1}{(n+2)^a} + \dots + \frac{1}{(2n)^a} - \\ & - \left[1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \dots - \frac{1}{(2n)^a} \right] = \\ & = \left(\frac{2}{2^a} - 1 \right) S_{n,1} = \frac{2-2^a}{2^a} S_{n,1}. \end{aligned}$$

Отсюда, после умножения на 2^a и деления на $2-2^a$, получается равенство (29).

Равенство (29) интересно потому, что оно сводит вычисление величины $S_{n,1}$ к вычислению величины $S_{2n,n+1}$ и величины $1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \dots - \frac{1}{(2n)^a}$. Первая из этих величин при больших n вычисляется с большой степенью точности с помощью неравенств (28). Относительно второй мы знаем из леммы 1, что она меньше нуля и больше $-\frac{2^a}{2-2^a}$. Если же мы найдем сумму первых четырех слагаемых этой последней величины, то оставшаяся величина (погрешность) будет меньше нуля и больше $-\frac{1}{5^a} \cdot \frac{2^a}{2-2^a}$.

В дальнейших задачах мы будем вычислять и эту величину с большей точностью.

Задача 1. Найти сумму

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

с точностью до 0,002.

Решение. В силу теоремы 8

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{10^6+1}} + \frac{1}{\sqrt{10^6+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^6}} \right) - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^6}} \right) = \\ & = (\sqrt{2}+1) \left(\frac{1}{\sqrt{10^6+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^6}} \right) - \\ & - (\sqrt{2}+1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^6}} \right) = \\ & = (\sqrt{2}+1)(B-C), \end{aligned}$$

где

$$B = \frac{1}{\sqrt{10^6 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{10^6 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^6}},$$

$$C = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^6}}.$$

Число B в силу леммы 2 удовлетворяет неравенствам

$$2(\sqrt{2 \cdot 10^6 + 1} - \sqrt{10^6 + 1}) < B < 2(\sqrt{2 \cdot 10^6} - \sqrt{10^6}).$$

Крайние числа этих неравенств отличаются друг от друга меньше чем на $3 \cdot 10^{-4}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{10^6 + 1} - \sqrt{10^6}) - 2(\sqrt{2 \cdot 10^6 + 1} - \sqrt{2 \cdot 10^6}) = \\ = \frac{2}{\sqrt{10^6 + 1} + \sqrt{10^6}} - \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 10^6 + 1} + \sqrt{2 \cdot 10^6}} \approx \frac{1}{\sqrt{10^6}} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^6}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1000} < 3 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее из этих чисел будет отличаться от числа B меньше чем на $2 \cdot 10^{-4}$. Вычислив первое число и вычтя из него $2 \cdot 10^{-4}$, получим

$$B = 828,4269 \pm \Delta_1,$$

$$|\Delta_1| < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Приступаем к вычислению числа C . Пусть m — нечетное число. Оценим величину

$$D = \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

С этой целью заметим, что

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1} = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}}$$

и

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{2}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}} - \frac{2}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} + \frac{2}{\sqrt{m+3} + \sqrt{m+1}} - \\
 &\quad - \frac{2}{\sqrt{m+4} + \sqrt{m+2}} + \dots - \frac{2}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}} = \\
 &= \sqrt{m+1} - \sqrt{m-1} - \sqrt{m+2} + \sqrt{m} + \sqrt{m+3} - \\
 &\quad - \sqrt{m+4} + \sqrt{m+2} + \dots - \sqrt{2n+1} + \\
 &\quad + \sqrt{2n-1} = \sqrt{m} - \sqrt{m-1} + \sqrt{2n} - \sqrt{2n+1}.
 \end{aligned}$$

Итак, число E вычисляется сравнительно просто. Вычтя из величины E величину D , получим:

$$\begin{aligned}
 E - D &= \left(\frac{2}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) - \\
 &\quad - \left(\frac{2}{\sqrt{m+2} + \sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right) + \dots \\
 &\quad \dots - \left(\frac{2}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right).
 \end{aligned}$$

Покажем, что все числа в скобках положительны и монотонно убывают. Действительно,

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}} - \frac{1}{\sqrt{m}} &= \frac{2\sqrt{m} - (\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})}{\sqrt{m}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})} = \\
 &= \frac{2m - 2\sqrt{m^2 - 1}}{\sqrt{m}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})(2\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{m}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})(2\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}) \times} \\
 &\quad \times (m + \sqrt{m^2 - 1}).
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что такие числа положительны и монотонно убывают с ростом m . В силу леммы 1

$$0 < E - D <$$

$$< \frac{2}{\sqrt{m}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-1})(2\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m-1}) \times} \\
 &\quad \times (m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

Мы сделаем не очень большую ошибку, заменив в знаменателе на m числа $m+1$ и $m-1$. При этом получим

$$0 < E - D < \frac{2}{\sqrt{m} \cdot 2\sqrt{m} \cdot 4\sqrt{m} \cdot 2m} = \frac{1}{8 \cdot m^{\frac{5}{2}}}.$$

Если положим $m=9$, то получим

$$0 < E - D < \frac{1}{8 \cdot 81 \cdot 3} < 0,0006.$$

Тем самым, при $m=9$ и $n=10^6$

$$\begin{aligned} E - D &= 0,0003 \pm \Delta_2, \quad |\Delta_2| < 0,0003, \\ D &= E - 0,0003 \pm \Delta_2 = \sqrt{9} - \sqrt{8} + \sqrt{2 \cdot 10^6} - \\ &\quad - \sqrt{2 \cdot 10^6 + 1} = 0,0003 \pm \Delta_2 = 0,1710 \pm \Delta_2. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к величине C . Имеем

$$\begin{aligned} C &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{8}} + D = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + 0,1710 \pm \Delta_2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + 0,1710 \pm \Delta_2 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{7}}{7} + 0,1710 \pm \Delta_2. \end{aligned}$$

Итак, для вычисления числа C с точностью до $3 \cdot 10^{-4}$ потребуется извлечь только 5 корней и произвести небольшое число арифметических действий. Воспользовавшись таблицами и произведя нужные вычисления, найдем

$$C = 0,6035 \pm \Delta_2.$$

Учитывая найденные значения величин B и C и возвращаясь к величине A , получим

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{2} + 1)(B - C) = (\sqrt{2} + 1)(827,8226 \pm \Delta_3) = \\ &= (\sqrt{2} + 1) \cdot 827,8226 \pm 2,5\Delta_3, \end{aligned}$$

где

$$|2,5\Delta_3| \leq 2,5(|\Delta_1| + |\Delta_2|) < 2,5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} < 2 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, с точностью до $2 \cdot 10^{-3}$

$$A = (\sqrt{2} + 1)827,8226 = 1998,539.$$

Задача 2. Вычислить число

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{10^{12}}}$$

с точностью до единицы.

Решение. В силу теоремы 8

$$A = \frac{\sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt[4]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{10^{12} + 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{10^{12} + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 10^{12}}} \right) - \\ - \frac{\sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt[4]{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 10^4}} \right).$$

Первое слагаемое может быть легко и с большой степенью точности найдено с помощью неравенств (28). В силу этих неравенств первое слагаемое можно заметить числом

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt[4]{2}} \frac{(2 \cdot 10^{12})^{\frac{3}{4}} - (10^{12})^{\frac{3}{4}}}{1 - \frac{1}{4}} = \\ = \frac{4}{3} \cdot 10^9 \left(\sqrt[4]{8} - 1 \right) \frac{\sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt[4]{2}} = \frac{4}{3} \cdot 10^9.$$

В силу леммы 1 сумма

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt[4]{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 10^{12}}} \right)$$

положительна и не больше первого слагаемого. Поскольку это слагаемое меньше двух, то

$$\frac{4}{3} \cdot 10^9 - 2 < A < \frac{4}{3} \cdot 10^9.$$

Крайние числа отличаются друг от друга на 2, а от числа A — меньше чем на 2. Среднее число $\frac{4}{3} \cdot 10^9 - 1$ отличается от A меньше чем на единицу. Подставив это число, получим

$$A = 1333333332,3 \pm \Delta, \quad |\Delta| < 1.$$

Заметим, что точность вычисления числа A , содержащего триллион слагаемых, очень высока. Относительная погрешность меньше

$$100 : 1333333332,3 < 0,0000001\%.$$

УПРАЖНЕНИЯ

27. Вычислить с точностью до единицы сумму

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}.$$

Отв. 14 999.

28. Покажите справедливость равенства

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - C + \beta_n,$$

где β_n — бесконечно малая величина, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, а

$$C = \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} \left[1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha} + \dots \right].$$

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. Полагаем в неравенствах (1) (стр. 7) $n = m, m+1, \dots, n$

$$2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} < 2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1},$$

$$2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1} < \frac{1}{\sqrt{m+1}} < 2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m},$$

$$2\sqrt{m+3} - 2\sqrt{m+2} < \frac{1}{\sqrt{m+2}} < 2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1},$$

.....

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \\ < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}.$$

2. Полагая в неравенствах упражнения 1 $m = 10\,000$, $n = 1\,000\,000$, получим

$$2\sqrt{1\,000\,001} - 2\sqrt{10\,000} < \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 2\sqrt{1\,000\,000} - 2\sqrt{9999}.$$

Так как

$$2\sqrt{1\,000\,001} > 2\sqrt{1\,000\,000} = 2000, \quad 2\sqrt{10\,000} = 200, \\ 2\sqrt{9999} = \sqrt{39\,996} > 199,98$$

(последнее неравенство можно легко проверить, извлекая квадратный корень с точностью до 0,01), то

$$2000 - 200 = 1800 < \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < \\ < 2000 - 199,98 = 1800,02.$$

3. Умножая неравенства упражнения 2 на 50, получим в наших обозначениях

$$90\,000 < 50z < 90\,001;$$

отсюда

$$[50z] = 90\,000.$$

4. При $n = 1$ справедливость неравенства очевидна:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = \frac{1}{2}.$$

Предполагая теперь, что неравенство справедливо для $n = k$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2k+1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}, \quad (a)$$

докажем его справедливость для $n = k+1$, т. е. докажем, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \quad (б)$$

Умножив неравенство (a) на $\frac{2k+1}{2k+2}$, получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+2}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Остается доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Умножив его на $(2k+2)\sqrt{3k+1}\sqrt{3k+4}$ и возводя обе части полученного неравенства в квадрат, получим

$$(2k+1)^2(3k+4) < (2k+2)^2(2k+1).$$

или

$$12k^3 + 28k^2 + 19k + 4 < 12k^3 + 28k^2 + 20k + 4.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $k \geq 1$.

Этим доказано, что неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

справедливо для всех n .

5. Полагая в неравенстве упражнения 4 $n = 50$, получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 50 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{151}} < \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}.$$

6. Полагая $y = 6 - x$, $x = 6 - y$, мы сведем задачу к нахождению наибольшего значения функции

$$(6 - y)y^2 = 6y^2 - y^3$$

при $0 < y < 6$. Полагая затем $y^2 = z$, получим функцию

$$6z - z^{\frac{3}{2}},$$

наибольшее значение которой (см. примечание на стр. 33) равно

$$\left(\frac{3}{2} - 1\right) \left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right) \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 0,5 \cdot 4^3 = 32$$

и достигается в точке

$$z = \left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2} - 1}} = 4^2.$$

Функция $6y^2 - y^3$ принимает наибольшее значение в точке $y = \sqrt{z} = 4$, и это значение равно 32.

Функция $x(6 - x)^2$ принимает наибольшее значение 32 в точке $x = 6 - y = 6 - 4 = 2$.

7. Объем коробки (см. на стр. 37 рис. 4) равен

$$V = x(2a - 2x)^2 = 4x(a - x)^2, \quad 0 < x < a.$$

Полагая $y = a - x$, $y^2 = z$, получим

$$V = 4 \left(az - z^{\frac{3}{2}} \right).$$

Наибольшее значение функции $az - z^{\frac{3}{2}}$ достигается в точке

$$z = \left(\frac{a}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2} - 1}} = \left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

Следовательно,

$$y = \sqrt{z} = \frac{2a}{3}, \quad x = a - y = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}.$$

Таким образом, объем коробки будет наибольшим, если длина стороны вырезаемого квадрата в шесть раз меньше длины стороны данного квадрата.

8. Наименьшее значение функции $x^6 + 8x^2 + 5$ равно 5 и достигается при $x=0$.

9. Полагая $y = x^2$, сведем задачу к нахождению наименьшего значения функции

$$y^3 - 8y + 5$$

для положительных значений y .

В теореме 5 мы доказали, что наименьшее значение функции $y^3 - 8y$ равно

$$(1-3)\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}} = -2 \frac{8^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = -\frac{32\sqrt{6}}{9}.$$

Наименьшее значение функции $y^3 - 8y + 5$ равно

$$-\frac{32\sqrt{6}}{9} + 5 = -3,6 \dots$$

10. Полагая $y = x^a$, получим функцию

$$y - ay^{\frac{1}{a}} = a \left(\frac{1}{a} y - y^{\frac{1}{a}} \right), \quad a > 0, \quad \frac{1}{a} > 1.$$

В силу теоремы 5 наибольшее значение функции $\frac{1}{a} y - y^{\frac{1}{a}}$ равно

$$\left(\frac{1}{a} - 1 \right) \left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} \right)^{\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-1}} = \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \left(\frac{a}{a} \right)^{\frac{1}{1-a}} = \frac{1-a}{a} \left(\frac{a}{a} \right)^{\frac{1}{a-1}}.$$

Умножая последнюю величину на a , мы и найдем наибольшее значение функции $a \left(\frac{1}{a} y - y^{\frac{1}{a}} \right)$, которое, следовательно, равно

$$(1-a) \frac{a}{a} \cdot \left(\frac{a}{a} \right)^{\frac{1}{a-1}} = (1-a) \left(\frac{a}{a} \right)^{1+\frac{1}{a-1}} = (1-a) \left(\frac{a}{a} \right)^{\frac{a}{a-1}}.$$

11. Функция $\sqrt[4]{x} - 2x$, $x \geq 0$, $a = \frac{1}{4}$, $a = 2$, имеет наибольшее значение, равное

$$\left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}} = \frac{3}{4} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}.$$

Следовательно, для всех $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sqrt[4]{x} - 2x \leq \frac{3}{8}, \quad \text{или} \quad \sqrt[4]{x} \leq \frac{3}{8} + 2x.$$

12. Запишем неравенство (8) в виде

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e, \quad (n+1)^n < en^n.$$

Если $n \geq 3 > e$, то

$$(n+1)^n < en^n < 3n^n \leq nn^n = n^{n+1}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $\frac{1}{n(n+1)}$, получим

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

13. Так как $1 < \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$, то $\sqrt[3]{3}$ — наибольшее из чисел $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$. С другой стороны, в предыдущей задаче мы показали, что последовательность чисел $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ убывает. Следовательно, $\sqrt[3]{3}$ — наибольшее из чисел $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$

14. Положим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$. Возводя в степень n , получим

$$n = (1 + \alpha_n)^n = \left[\left(1 + \alpha_n\right)^{\frac{n}{2}} \right]^2.$$

Предполагая, что $n \geq 2$, $\frac{n}{2} \geq 1$, на основании теоремы 3 получим

$$\left(1 + \alpha_n\right)^{\frac{n}{2}} > 1 + \frac{n}{2} \alpha_n, \quad n > \left(1 + \frac{n}{2} \alpha_n\right)^2 = 1 + n \alpha_n + \frac{n^2}{4} \alpha_n^2.$$

Отсюда следует, что

$$n > \frac{n^2}{4} \alpha_n^2, \quad \alpha_n^2 < \frac{4}{n}, \quad \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Примечание. Пользуясь биномом Ньютона, легко проверить, что

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{2}{n} + \dots > \\ &> 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{2}{n} = n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

15. При $n = 1$ и $a_i > -1$ неравенство очевидно:

$$1 + a_1 \geq 1 + a_1.$$

Предположим, что неравенство справедливо для $n = k$, т. е.

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Умножив обе части неравенства на $(1 + a_{k+1})$, получим

$$\begin{aligned} (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geq \\ &\geq (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k)(1 + a_{k+1}) = \\ &= 1 + a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} + a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+1} + \dots + a_k a_{k+1}. \end{aligned}$$

Так как числа $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ одного знака, то

$$a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+1} + \dots + a_k a_{k+1} \geq 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geq \\ &\geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}, \end{aligned}$$

т. е. неравенство доказано и для $n = k + 1$.

Этим завершено доказательство справедливости неравенства

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

для всех n .

16. Если многочлен $(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2$ имеет действительный корень $x = x_1$, т. е.

$$(a_1 x_1 - b_1)^2 + (a_2 x_1 - b_2)^2 + \dots + (a_n x_1 - b_n)^2 = 0,$$

то каждое из чисел $a_1 x_1 - b_1, a_2 x_1 - b_2, \dots, a_n x_1 - b_n$ равно нулю, т. е.

$$0 = a_1 x_1 - b_1 = a_2 x_1 - b_2 = \dots = a_n x_1 - b_n,$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}.$$

Этим мы доказали, что многочлен

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 = \\ = x^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + \\ + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

не может иметь двух различных действительных корней, и, следовательно,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \leq 0.$$

Отсюда и следует неравенство (19):

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq \\ \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Заметим, что знак равенства имеет место, только когда рассмотренный нами многочлен имеет действительный корень, т. е. когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

17. Пользуясь неравенством (19), получим

$$c_1^2 = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 \leq \\ \leq \left(\frac{a_1^2}{n} + \frac{a_2^2}{n} + \dots + \frac{a_n^2}{n} \right) \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)}_n = \\ = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} = c_2^2.$$

Отсюда следует, что

$$c_1 \leq c_2$$

(среднее арифметическое не превосходит среднего квадратического).

18. Из неравенства

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2 = n+1 + 2\sqrt{n^2-1} + n-1 = \\ = 2n + 2\sqrt{n^2-1} < 2n + 2\sqrt{n^2} = 4n$$

следует, что

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}, \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \\ = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{2}.$$

Умножая на 2, получим

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

19. Полагаем в неравенстве упражнения 18 $n = 2, 3, \dots, n$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{3} - 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{4} - \sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} < \sqrt{5} - \sqrt{3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{6} - \sqrt{4},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Сложив написанные неравенства, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - 1.$$

Прибавив по 1 к обеим частям неравенства, окончательно найдем

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \\ < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}.$$

Примечание. В § 1 гл. II было доказано, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1.$$

Числа $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$ и $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1$ отличаются друг от друга менее чем на 0,42. Каждое из этих чисел может быть взято за приближенное значение суммы

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = z_n.$$

Отметим без доказательства, что число $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$ менее отличается от числа z_n , чем число $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1$.

20. Функция $\frac{x^3}{x^4+5}$ принимает отрицательные значения при $x < 0$. Следовательно, наибольшее значение функции достигается для положительных значений x .

Так как

$$\frac{x^3}{x^4+5} = \frac{1}{5\left(\frac{1}{5}x + x^{-3}\right)},$$

то наибольшее значение функции достигается в той же точке, в которой функция $\frac{1}{5}x + x^{-3}$ принимает наименьшее значение. Из задачи 4 § 1 гл. II следует, что наименьшее значение этой функции равно

$$(1+3)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-3}{-3-1}} = 4\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Наибольшее значение функции $\frac{x^3}{x^4+5}$ равно

$$\frac{1}{5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{15^{\frac{3}{4}}}{20} = \frac{15}{20\sqrt[4]{15}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{15}}.$$

Чтобы найти наибольшее значение функции $x^6 - 0,6x^{10}$, положим $y = x^6$. Ясно, что $y \geq 0$. Функция

$$y - 0,6y^{\frac{10}{6}} = 0,6\left(\frac{10}{6}y - y^{\frac{10}{6}}\right)$$

принимает наибольшее значение (см. примечание на стр. 33), равно

$$0,6\left(\frac{10}{6} - 1\right)\left(\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}-1}\right)^{\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}-1}} = 0,4.$$

21. Полагая в этом упражнении $y = \frac{1}{x^2}$, получим

$$\sqrt{x} + \frac{a}{x^2} = y^{-\frac{1}{4}} + ay.$$

Наименьшее значение функции $y^{-\frac{1}{4}} + ay$, как это следует из задачи 4 § 1 гл. II, равно

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)(4a)^{\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}}.$$

Полагая $\frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}} = 2,5$, получим

$$(4a)^{\frac{1}{5}} = 2, \quad 4a = 32, \quad a = 8.$$

$$\begin{aligned} 22. S &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) - \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) - \\ &\quad - \frac{2}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

(мы воспользовались равенством (27)).

23. Так как $\alpha > 0$, то $\alpha + 1 > 1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} &> 1 + \frac{1+\alpha}{n}, \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} &> 1 - \frac{1+\alpha}{n}. \end{aligned}$$

Умножая эти неравенства на $n^{1+\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} (n+1)^{1+\alpha} &> n^{1+\alpha} + (1+\alpha)n^{\alpha}, \\ (n-1)^{1+\alpha} &> n^{1+\alpha} - (1+\alpha)n^{\alpha}. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что

$$\frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\ln \frac{(n+1)(n+2) \dots (kn+1)}{n(n+1) \dots kn} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{kn} < \\ < \ln \left[\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} \dots \frac{kn}{kn-1} \right],$$

т. е.

$$\ln \frac{kn+1}{n} = \ln \left(k + \frac{1}{n} \right) < \\ < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} < \ln \frac{kn}{n-1} = \ln \left(k + \frac{k}{n-1} \right).$$

Если n стремится к бесконечности, то $\ln \left(k + \frac{1}{n} \right)$ стремится к $\ln k$ и $\ln \left(k + \frac{k}{n-1} \right)$ стремится к этому же пределу. Следовательно, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{kn} \right) = \ln k.$$

27. В силу теоремы 6

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} = \\ = \frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{10^6} + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6} + 2} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 10^6}} \right) - \\ - \frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 10^6}} \right).$$

Второе слагаемое отрицательно, но больше $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}} > -1,9$.

Первое слагаемое, в силу неравенств (28), удовлетворяет неравенствам

$$\frac{3}{2} (\sqrt[3]{2 \cdot 10^6 + 1} - \sqrt[3]{10^6 + 1}) \frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}} < \\ < \frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{10^6} + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6} + 2} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 10^6}} \right) < \\ < \frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}} (\sqrt[3]{2 \cdot 10^6} - \sqrt[3]{10^6}) \frac{3}{2} = 15\,000.$$

Так как крайние члены последних неравенств отличаются друг от

друга мало (меньше 0,1), то

$$15\,000 - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} < 15\,000.$$

Среднее число 14999 отличается от $\sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ меньше чем на 1.

28. В силу теоремы 6

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} &= \\ &= \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} \left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right] - \\ &\quad - \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} \left[1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \dots - \frac{1}{(2n)^\alpha} \right] = A_n - B_n \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} \left[\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right], \\ B_n &= \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} \left[1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \dots - \frac{1}{(2n)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Число B_n — частичная сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Этот ряд знакопередающийся с монотонно убывающими по абсолютной величине членами. Остаток его по абсолютной величине не больше абсолютной величины первого члена остатка, т. е. числа $\frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$. Поскольку это число при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то ряд сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} (-1)^k \frac{1}{k^\alpha} = C,$$

т. е. $\gamma_n = B_n - C$ — бесконечно малая величина. Теперь, опираясь на неравенства (28), получим

$$\begin{aligned} \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} [(2n-1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}] &< A_n < \\ &< \frac{2^\alpha}{2 - 2^\alpha} [(2n)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}] = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку разность между крайними членами неравенств стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то $\delta_n = A_n - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ — бесконечно малая величина.

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} = A_n - B_n =$$

$$= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \delta_n - C + \gamma_n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - C + \beta_n,$$

где $\beta_n = \delta_n + \gamma_n$ — бесконечно малая величина.

Павел Петрович Коровкин

НЕРАВЕНСТВА

(Серия: «Популярные лекции по математике»)

М., 1974 г., 72 стр. с илл.

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректор *Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 18/1 1974 г.

Подписано к печати 20/V 1974 г.

Бумага 84×103/2, тип. № 3. Физ. печ. л. 2,25.
Условн. печ. л. 3,76. Уч.-изд. л. 3,16.
Тираж 200 000 экз. Цена книги 9 коп. Заказ № 68

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома

при Государственном комитете Совета Министров

СССР по делам издательств, полиграфии

и книжной торговли.

198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

- Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
 Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
 Вып. 3. И. С. Соминский. Метод математической индукции.
 Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
 Вып. 5. П. П. Коровкин. Неравенства.
 Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
 Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
 Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
 Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
 Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
 Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах.
 Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых величин.
 Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
 Вып. 14. А. И. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
 Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
 Вып. 16. В. Г. Шервагов. Гиперболические функции.
 Вып. 17. В. Г. Болтянский. Что такое дифференцирование?
 Вып. 18. Г. М. Миракьян. Прямой круговой цилиндр.
 Вып. 19. Л. А. Люстерник. Кратчайшие линии.
 Вып. 20. А. М. Лопшиц. Вычисление площадей ориентированных фигур.
 Вып. 21. Л. И. Головина и И. М. Яглом. Индукция в геометрии.
 Вып. 22. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносторонние фигуры.
 Вып. 23. А. С. Смогоржевский. О геометрии Лобачевского.
 Вып. 24. Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков. Конфигурационные теоремы.
 Вып. 25. А. С. Смогоржевский. Линейка в геометрических построениях.
 Вып. 26. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и машинное решение задач.
 Вып. 27. В. А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике.
 Вып. 28. Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины.
 Вып. 29. А. Н. Костовский. Геометрические построения одним циркулем.
 Вып. 30. Г. Е. Шилов. Как строить графики.
 Вып. 31. А. Г. Дорфман. Оптика конических сечений.
 Вып. 32. Е. С. Вентцель. Элементы теории игр.
 Вып. 33. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование.
 Вып. 34. Б. Е. Маргулис. Системы линейных уравнений.
 Вып. 35. Н. Я. Виленкин. Метод последовательных приближений.
 Вып. 36. В. Г. Болтянский. Огибающая.
 Вып. 37. Г. Е. Шилов. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
 Вып. 38. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние?
 Вып. 39. Н. Н. Воробьев. Признаки делимости.
 Вып. 40. С. В. Фомин. Системы счисления.
 Вып. 41. Б. Ю. Коган. Приложение механики к геометрии.
 Вып. 42. Ю. И. Любич и Л. А. Шор. Кинематический метод в геометрических задачах.
 Вып. 43. В. А. Успенский. Треугольники Паскаля.
 Вып. 44. И. Я. Бакельман. Инверсия.
 Вып. 45. И. М. Яглом. Необыкновенная алгебра.
 Вып. 46. И. М. Соболев. Метод Монте-Карло.
 Вып. 47. Л. А. Калужнин. Основная теорема арифметики.
 Вып. 48. А. С. Солодовников. Системы линейных неравенств.
 Вып. 49. Г. Е. Шилов. Математический анализ в области рациональных функций.
 Вып. 50. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Разбиение фигур на меньшие части.
 Вып. 51. Н. М. Бескин. Изображения пространственных фигур.
 Вып. 52. Н. М. Бескин. Деление отрезка в данном отношении.
 Вып. 53. Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева. Стереорафическая проекция.